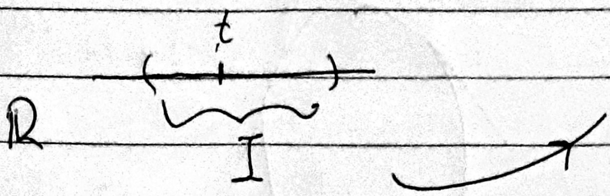
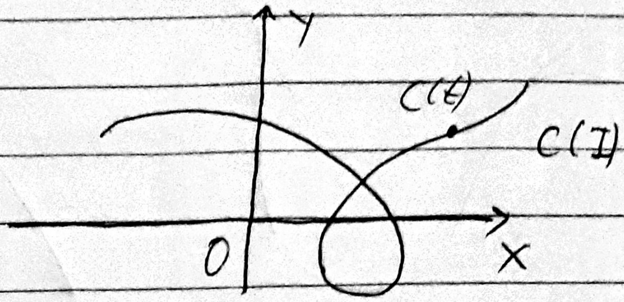
Μάθημα 2ο 24/10/17

Καμπύλες του $\mathbb{R}^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ | Μια λεία απεικόνιση $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλείται καμπύλη του $\mathbb{R}^2$





$t \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$

t = παράμετρος

$x(t), y(t)$ = συναρτήσεις σημείων της c

(Συνήθως απαιτούμε τάξης C^2)

Γεωμετρικώς Ισότιμες καμπύλες

ΟΡΙΣΜΟΣ | Δυο καμπύλες $c, \tilde{c}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμες αν-ν υπάρχει ισομετρία $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$: $\tilde{c} = T \circ c$

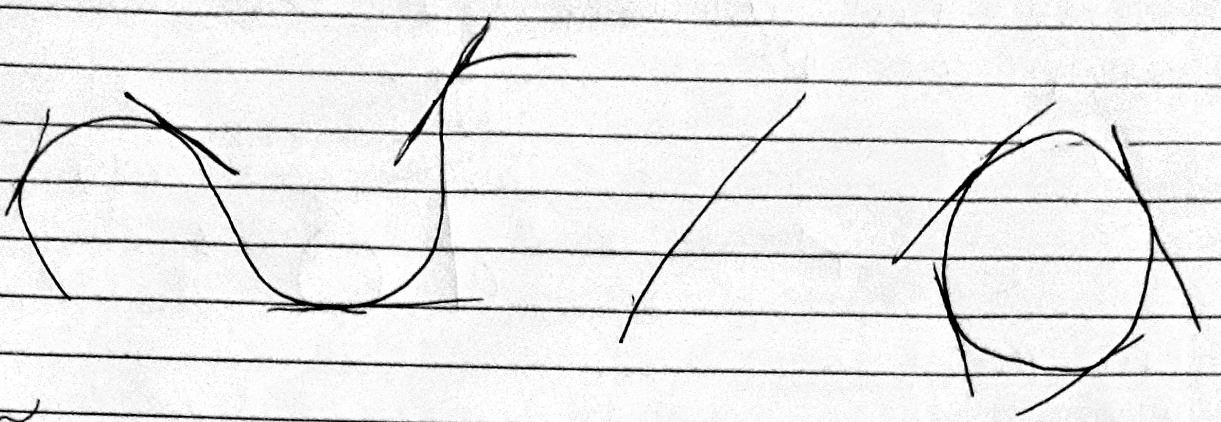
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

→ Κανονικές καμπύλες

ΟΡΙΣΜΟΣ | Μια καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλείται ΚΑΝΟΝΙΚΗ αν-ν ισχύει: $c'(t) \neq 0 \ \forall \ t \in I$

Το διάνυσμα $c'(t)$ καλείται εφαπτόμενο ή διάνυσμα ταχύτητας της c στο t

"Εφαπτόμενη ευθεία" της c στο t_0 είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $c'(t_0) \neq 0$



ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

Κάθε $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ γράφεται ως $T = T_v \circ A$

όπου T_v = παράλληλη μεταφορά κατά v **και** $A \in O(2)$ ορθογώνιος μετασχηματισμός

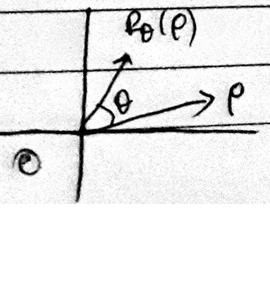
$v = (v_1, v_2)$, $T_v(p) = p + v = (x + v_1, y + v_2)$

$p = (x, y)$

Οι μόνοι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^2$ είναι η στροφή και ο κατοπτρισμός

Στροφές κατά γωνία θ: είναι μια γραμμ. απεικόνιση $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα ως προς τη βάση $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

τον πίνακα $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



R_θ = ορθογώνιος μετασχ.

$T(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta + v_1,\ x\sin\theta + y\cos\theta + v_2)$

Κατοπτρισμός είναι κάθε γραμμική απεικόνιση

$K_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ της οποίας ο πίνακας ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

$T(x,y) = (x\cos\theta + y\sin\theta + v_1,\ x\sin\theta - y\cos\theta + v_2)$

$\boxed{\text{Ερώτημα}}$ Αν $c, \tilde{c}$ είναι γεωμ. ισότιμες καμπύλες και η c είναι κανονική, τότε είναι και η $\tilde{c}$ κανονική ;;;

Απάντηση: $\tilde{c} = T \circ c$, $T = T_v \circ A$

$c'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in I$, $c(t) = (x(t), y(t))$

$\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$

$v = (v_1, v_2)$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ο πίνακας του A

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + v_1 \\ \tilde{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + v_2 \end{cases}$$

$c'(t) \neq (0,0) \Leftrightarrow (x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$

$\tilde{c}'(t) = (\tilde{x}'(t), \tilde{y}'(t))$

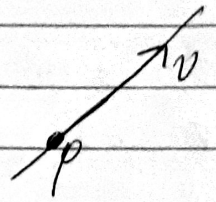
$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}'(t) = a_{11}x'(t) + a_{12}y'(t) \\ \tilde{y}'(t) = a_{21}x'(t) + a_{22}y'(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\tilde{x}'(t)\\ \tilde{y}'(t)\end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{c}'(t) = A\cdot c'(t)}$$

$$\|\tilde{c}'(t)\| = \|A\, c'(t)\| = \|c'(t)\| > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ!

- Δίνεται $p\in\mathbb{R}^2$ και διάνυσμα $v\neq 0$. Η καμπύλη
  $c_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$
  $c(t)=p+tv$, $c'(t)=v\neq 0$

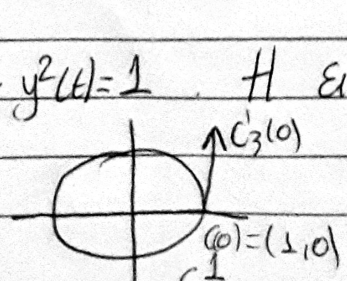


- $c_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $c(t)=p+t^3v$
  $c_2(\mathbb{R})=c_1(\mathbb{R})$, $c'(t)=3t^2v$
  $c'(0)=0$ (ΟΧΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗ)

- $c_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $c_3(t)=(\cos t, \sin t)$
  είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c_3'(t)=(-\sin t, \cos t)\neq(0,0)$

$\forall t\in\mathbb{R}$ είναι κανονική $\left.\begin{array}{l}x(t)=\cos t\\ y(t)=\sin t\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(t)+y^2(t)=1$. Η εικόνα της c_3 είναι το $c_3(\mathbb{R})$

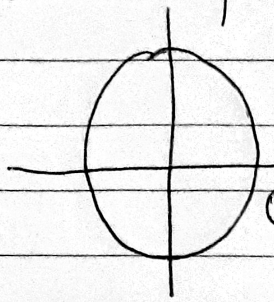


$S^1: x^2+y^2=1$

→ $C_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $C_4(t) = (\overbrace{\cos 3t}^{x(t)}, \overbrace{\sin 3t}^{y(t)})$

Είναι λείτ με διάνυσμα ταχύτητας

$C_4'(t) = (-3\sin 3t, 3\cos 3t) \neq (0,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ άρα είναι κανονική με εικόνα $C_4(\mathbb{R}) = S^1$

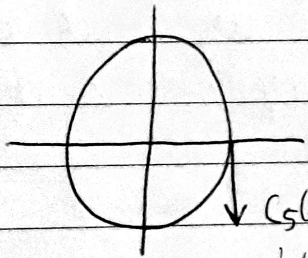


$C_4(0) = (1,0)$

$C_4'(0) = (0,3) = 3(0,1)$ [x3 ταχύτητα]

→ $C_5: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $C_5(t) = (\cos t, -\sin t) = C_3(-t)$

κανονική με $C_5'(t) = (-\sin t, -\cos t)$ με εικόνα $C_5(\mathbb{R}) = S^1$



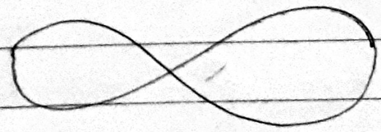
$C_5(0) = (1,0)$

$C_5'(0) = (0,-1)$

→ $C_6: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $C_6(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$ λείτ με διάνυσμα ταχύτητας

$C_6'(t) = (-2t\sin t^2, 2t\cos t^2)$, $C_6'(0) = (0,0)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ

$C_6(t) = C_3(t^2)$



$C(t) = (\sin t, \frac{1}{2}\sin 2t)$

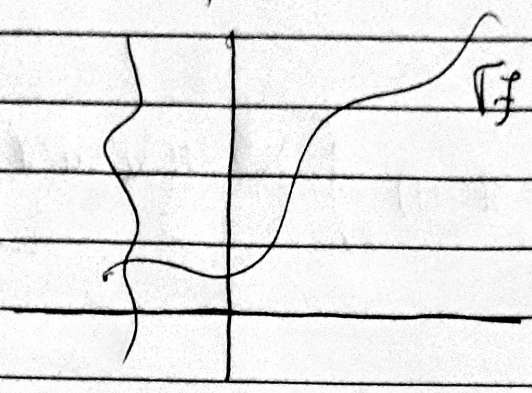
$C(t) = (a\cos t, b\sin t)$

$a, b > 0$

Καμπύλες Γραφήματα

Έστω λεία συνάρτηση $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Το γράφημα της f είναι το σύνολο

$$\Gamma_f = \{(t, f(t)) / t \in I\}$$

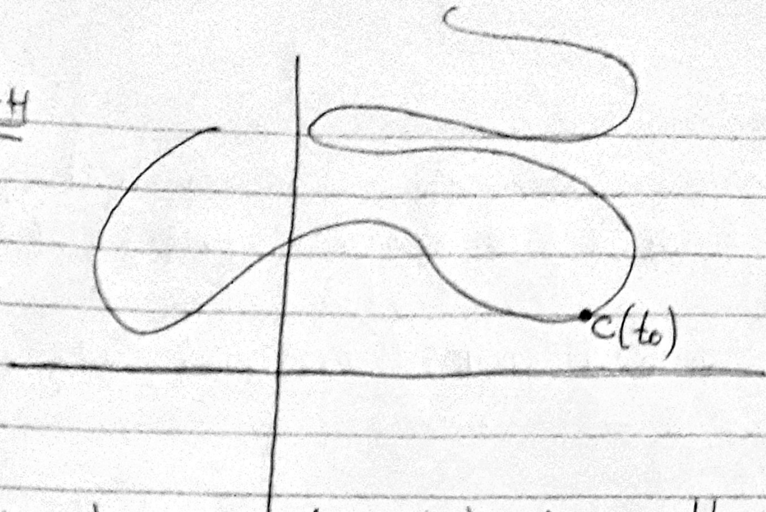


Το γράφημα Γ_f είναι η εικόνα της καμπύλης

$c: I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t, f(t))$ $c'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0)$.
Η $c(t) = (t, f(t))$ είναι καμπύλη γράφημα ως προς τον άξονα Ox. Καμπύλες γραφήματα ως προς τον άξονα Oy είναι της μορφής $c(t) = (g(t), t)$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ Έστω $c: I \to \mathbb{R}$ κανονική καμπύλη. $\forall\, t_0 \in I$ $\exists\, \varepsilon > 0$ ώστε ο περιορισμός $c|_{(t_0-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon)}$ είναι καμπύλη γράφημα είτε ως προς τον Ox ή τον Oy

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$c(t)=(x(t),y(t))$, $c'(t)=(x'(t),y'(t))\neq(0,0)$. Η $x'(t_0)\neq 0$ ή $y'(t_0)\neq 0$

Έστω ότι $x'(t_0)\neq 0$. Επειδή η $x'(t)$ είναι συνεχής έχω ότι $x'(t)\neq 0$ $\forall\ t\in(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon>0$

$\Rightarrow x'(t)>0\ \forall\ t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ ή $x'(t)<0\ \forall\ t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$

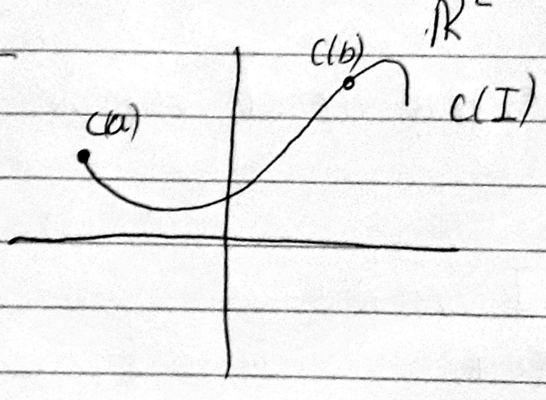
Άρα από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης

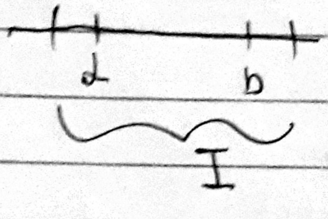
$x=x(t) \rightleftarrows t=t(x)$ = λείο συνάρτηση του x

$$(x(t),y(t))=(x,\underbrace{y(t(x))}_{=f(x)})=(x,f(x))$$

Μήκος Καμπύλης

Έστω $c: I\to\mathbb{R}^2$





Θεωρώ διαμέριση $P=\{a=t_0<\dots<t_{k-1}<t_k=b\}$ του διαστήματος $[a,b]$. Η λεπτότητα της διαμέρισης P είναι ο αριθμός $|P|=\max\{t_{i+1}-t_i \,/\, i=0\dots k-1\}$

Το μήκος της πολ. γραμ. με άκρα $c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_k)$ είναι ο αριθμός $L(P,c)=\sum_{i=0}^{k-1}\|c(t_{i+1})-c(t_i)\|$

Θεωρώ ακολουθία διαμερίσεων P_n ώστε $\lim|P_n|=0$
Τότε το $\lim L(P_n,c)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητος της ακολουθίας P_n.
Ο αριθμός αυτός καλείται μήκος καμπύλης από το a ως το b, $\overset{b}{\underset{a}{L}}(c)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν c είναι C^1 καμπύλη τότε:

$$\overset{b}{\underset{a}{L}}(c)=\int_a^b \|c'(t)\|dt=\int_a^b\sqrt{\langle c'(t),c'(t)\rangle}\,dt$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $c,\tilde{c}$ είναι C^1 γεωμ. ισότιμες καμπύλες τότε $\overset{b}{\underset{a}{L}}(\tilde{c})=\overset{b}{\underset{a}{L}}(c)$

Απόδ.

$\tilde{c}=T\circ c$, $T\in Isom(\mathbb{R}^c)$

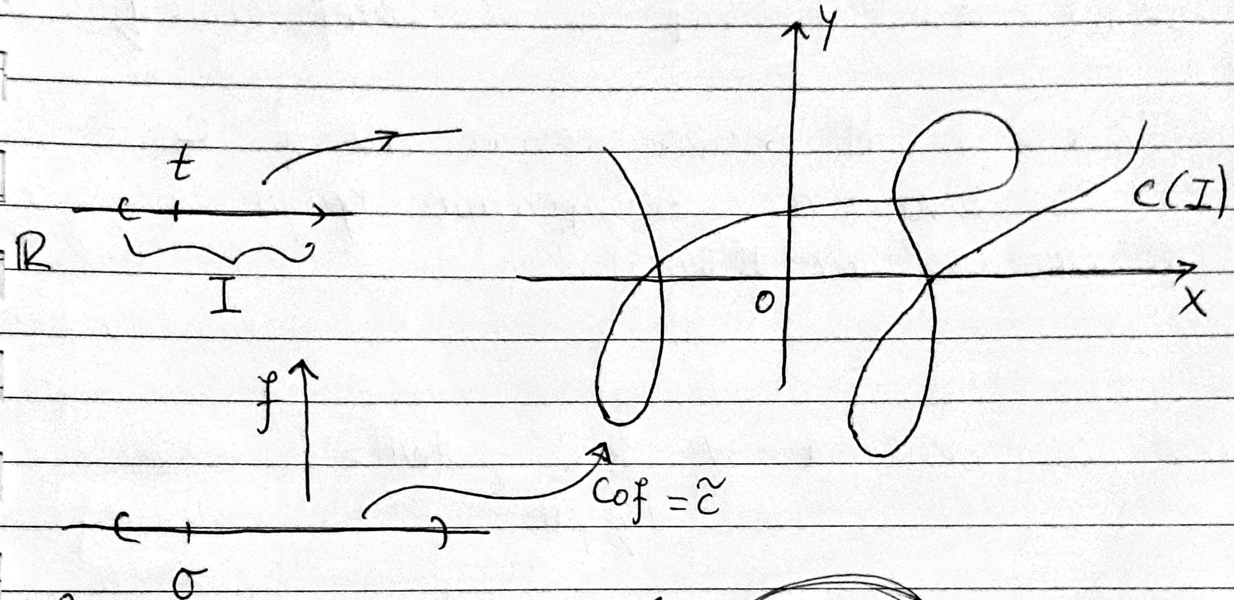
$T=T_v\circ A$, $\tilde{c}'(t)=Ac'(t)$

$$\overset{b}{\underset{a}{L}}(\tilde{c})=\int_a^b\|\tilde{c}'(t)\|dt=\int_a^b\|Ac'(t)\|dt=\int_a^b\|c'(t)\|dt=\overset{b}{\underset{a}{L}}(c)$$

$c_1(t) = p + tu$
$c_2(t) = p + t^3u$

Αναπαραμέτρηση Καμπυλών

Έστω $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ λεία καμπύλη
$t \mapsto c(t)$. Υποθέτω ότι $f : J \to I$ με $t = f(\sigma)$, $\sigma \in I$ είναι λεία 1-1 και επί συνάρτηση. Η καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$ καλείται αναπαραμέτρηση της καμπύλης c.



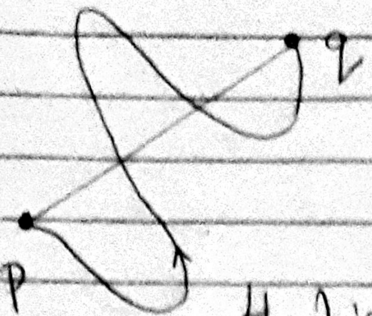
Οι $\tilde{c}, c$ έχουν την ίδια εικόνα.
Το διάνυσμα ταχύτητας της c είναι $\frac{dc}{dt}$

" " " της αναπαραμέτρησης ($\tilde{c}$) είναι $\frac{d\tilde{c}}{dt}$

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} = \frac{dt}{d\sigma}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\tilde{c}}{d\sigma} = \frac{df}{d\sigma} \cdot \frac{dc}{dt}}$$

"Συμπέρασμα": Έστω ότι η c είναι κανονική. Τότε η αναπαραμέτρηση $\tilde{c} = c \circ f$ είναι κανονική $\Leftrightarrow$ $\frac{df}{d\sigma} > 0$ παντού ή $\frac{df}{d\sigma} < 0$ παντού (θετικές αναπ/σεις)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δίνονται 2 σημεία $p, q \in \mathbb{R}^2$ με $p \neq q$



Υπάρχει καμπύλη που ενώνει τα p, q και έχει ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των καμπυλών που ενώνει τα p, q

Η λύση στο πρόβλημα είναι το ευθύγραμμο τμήμα

Έστω $c: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη C^1 με $c(a) = p$, $c(b) = q$

ΘΔΟ $L_a^b(c) \geq d(p, q)$. Η ισότητα ισχύει αν η c είναι το ευθύγραμμο τμήμα

(ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ)

Απόδειξη

Θεωρώ το διάνυσμα $w = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$, $\|w\| = 1$

$$\langle c'(t), w \rangle \leq |\langle c'(t), w \rangle| \leq \|c'(t)\| \, \|w\| = \|c'(t)\| \quad \forall \, t \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b \langle c'(t), w \rangle dt \leq \ldots \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_a^b(c)$$

Αν $V, W: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ είναι λείες, τότε $\langle V, W \rangle$ είναι λεία συνάρτηση $\langle V, W \rangle' = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle$

$$\|p-q\| = \frac{\langle p-q, p-q \rangle}{\|p-q\|} = \langle c(b) - c(a), \frac{p-q}{\|p-q\|} \rangle = \langle c(b), w \rangle - \langle c(a), w \rangle =$$

$$= \int_a^b \langle c(t), w \rangle' dt = \int_a^b \langle c'(t), w \rangle dt \leq \ldots \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_a^b(c)$$

Αν $\overset{b}{\underset{a}{L}}(c) = d(p,q) \Rightarrow c'(t), w$ είναι ομόρροπα $\forall t$

δηλαδή $c'(t) = f(t)w \Rightarrow f(t) = \langle c'(t), w \rangle$

$f(t) = \langle c(t), w \rangle' \Big| \Rightarrow \int_a^t c'(u)du = \left(\int_a^t f(u)du\right) \cdot w$

$\Leftrightarrow c(t) - c(a) = g(t)w \Leftrightarrow c(t) = p + g(t)w$